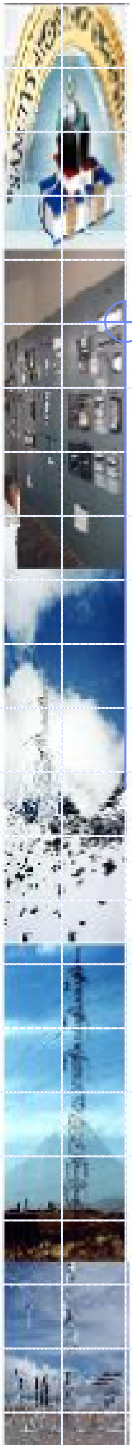


CURSO

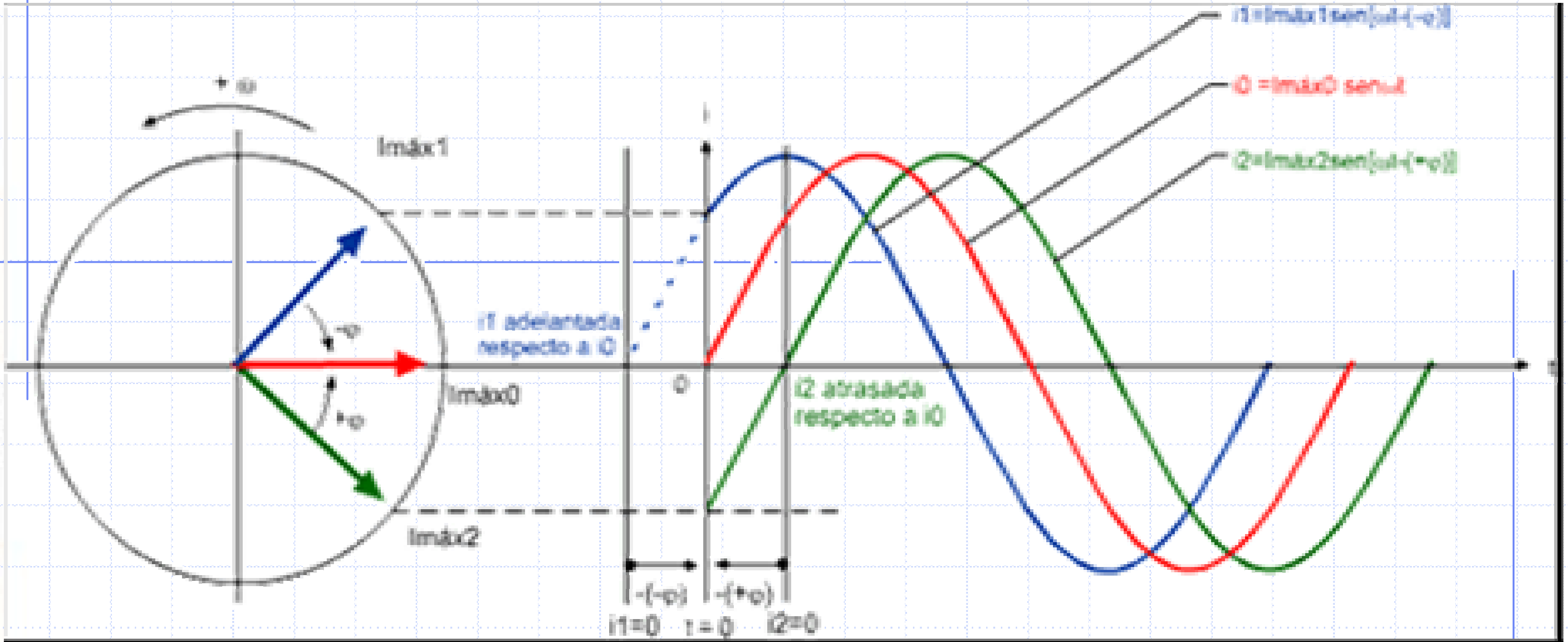
PROTECCION DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

CAPITULO 2

PROFESOR: ING. BERNARDINO ROJAS VERA

AREQUIPA, OCTUBRE, NOVIEMBRE 2004

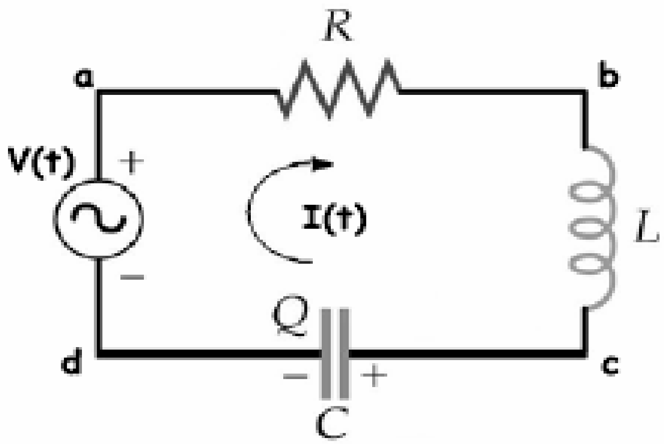
FASORES



Imáx1
Imáx0
Imáx2
i1 adelantada
respecto a i0
i2 atrasada
respecto a i0
i1=0
t = 0
i2=0

FASORES

Ley de Ohm. Circuito RLC serie



$$\begin{cases} V(t) = V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \\ I(t) = I_0 \,\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{ab}(t) = V_R(t) = I_0 R \,\mathrm{sen}(\omega t) \\ V_{bc}(t) = V_L(t) = I_0 X_L \,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ V_{cd}(t) = V_C(t) = I_0 X_C \,\mathrm{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{V(t) = V_{ab}(t) + V_{bc}(t) + V_{cd}(t)}$$

$$V_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) = I_0 R \,\mathrm{sen}(\omega t) + I_0 X_L \cos(\omega t) - I_0 X_C \cos(\omega t)$$

$$\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \mathrm{sen}\,\beta \cos\alpha$$

$$V_0 \cos(\phi) = I_0 R$$

$$V_0 \,\mathrm{sen}(\phi) = I_0 (X_L - X_C) \longrightarrow V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

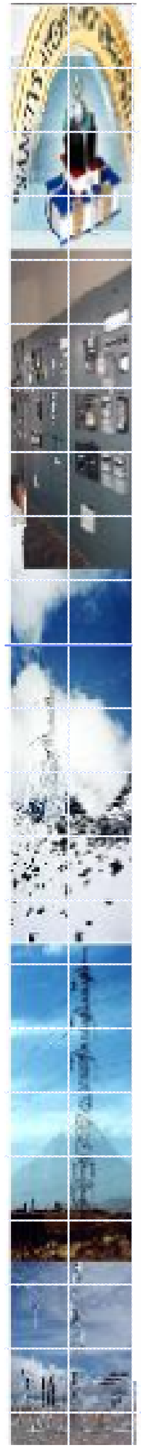
$$\frac{V_0 \,\mathrm{sen}\phi}{V_0 \cos\phi} = \frac{I_0 (X_L - X_C)}{I_0 R} \longrightarrow \phi = \mathrm{arctg} \frac{(X_L - X_C)}{R}$$

Impedancia del circuito

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Ley de Ohm

$$V_0 = I_0 Z$$

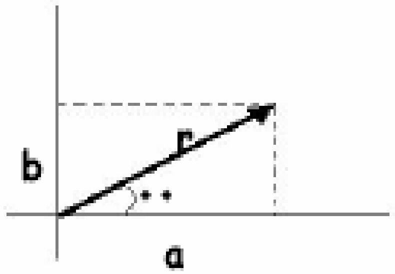


FASORES

Técnica fasorial

Se asigna a la magnitud física correspondiente un número complejo (un vector), de tal forma que la magnitud sea la parte real o la imaginaria del mismo.

Números complejos



· Forma binómica	(a+bi)
· Forma trigonométrica	r (cos• •+ i sen•)
· Forma polar	r..
· Forma exponencial	r e[i••]
· Forma cartesiana	(a,b)

$$V(t) = V_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \longrightarrow V_0\, e^{i(\omega t + \phi)} = \left(V_0\, e^{i\phi}\right) e^{i(\omega t)}$$

Parte constante: FASOR

$$\overline{V} = \left(V_0\, e^{i\phi}\right)$$

Información del valor de pico y la fase inicial

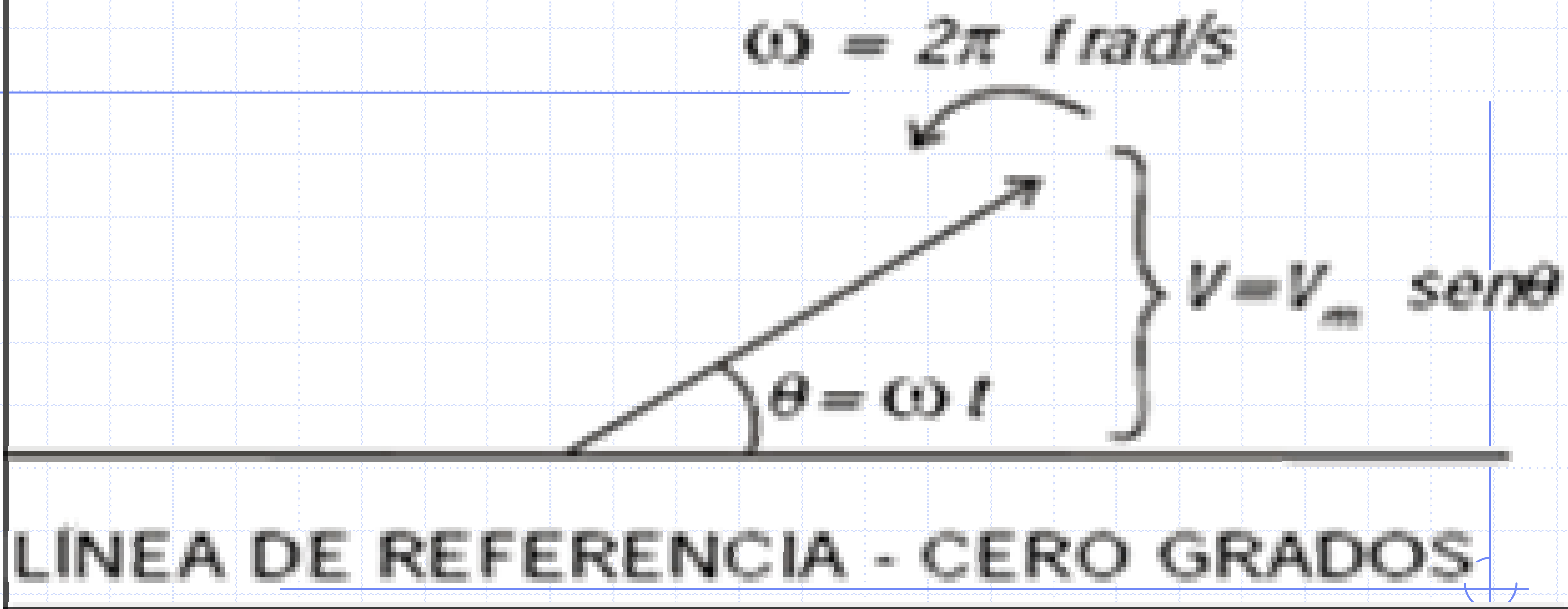
Como • •es normalmente constante, se puede trabajar sólo con el fasor y añadir la parte temporal cuando se desee obtener la señal

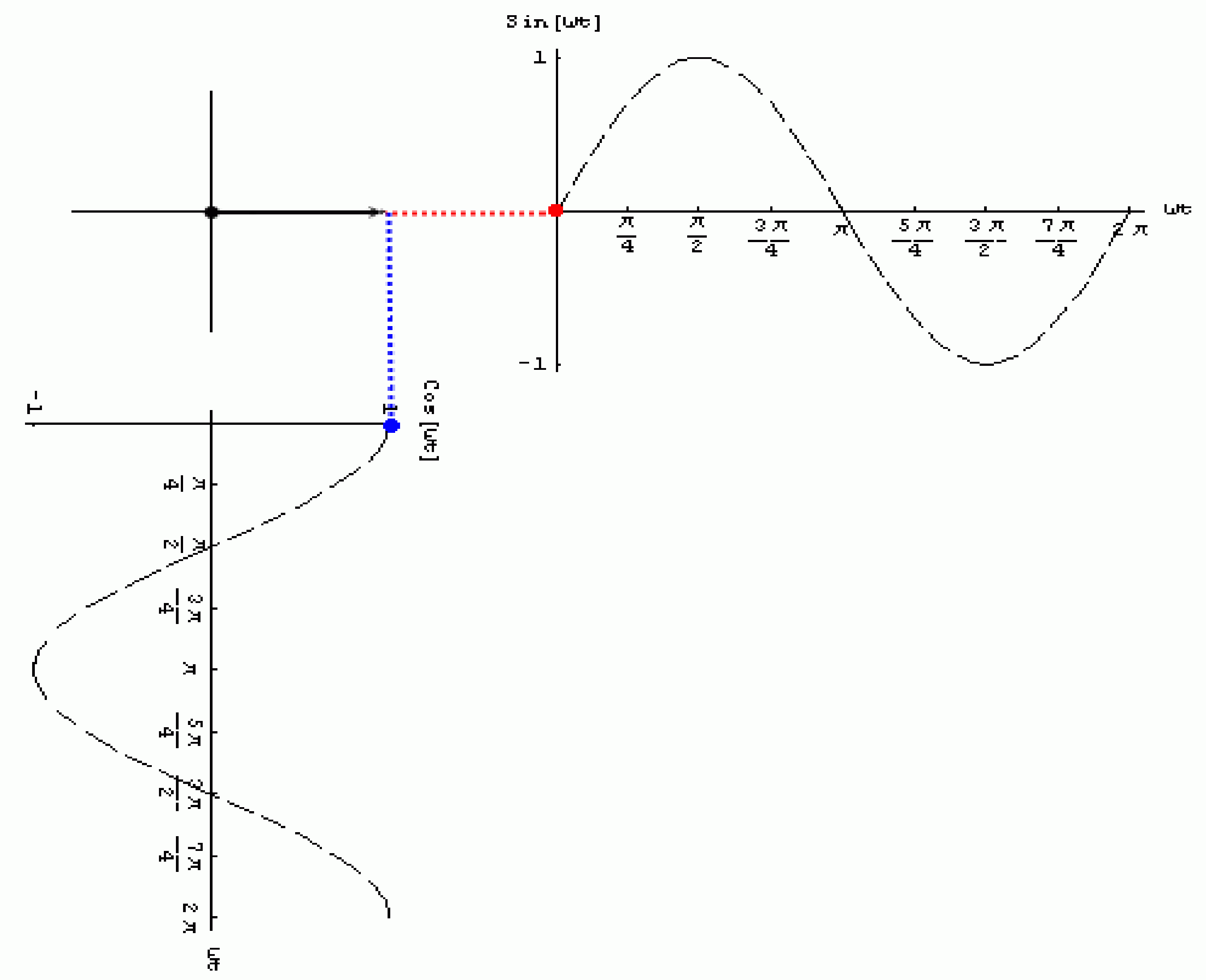
Fasor impedancia
o
Impedancia compleja

$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}}$$

- Su módulo es la impedancia del circuito
- Es independiente del tiempo
- Es característico de cada circuito y de su régimen estacionario

Representación de un fasor.





Sin[ωt]
1
-1
ωt
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π
Cos[ωt]

FASORES

Resolución de circuitos de corriente alterna

Asociación de impedancias (complejas)

Serie $$\overline{Z}_s = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i$$

La ADMITANCIA compleja es el inverso de la IMPEDANCIA compleja $\overline{Y}$

Paralelo $$\frac{1}{\overline{Z}_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i} \qquad \overline{Y}_p = \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i$$

Ley de Ohm en forma fasorial $\longrightarrow$ $\boxed{\overline{V} = \overline{I}\,\overline{Z}}$

Leyes de Kirchhoff

- La suma de todos los fasores intensidad que llegan a un nudo es igual a la suma de los fasores intensidad que salen del mismo.
- La suma de todos los fasores tensión en una malla es igual a cero.

$$\overline{Z} = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + i\underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$

$$\overline{Y} = \underbrace{G}_{\text{conductancia}} + i\underbrace{B}_{\text{susceptancia}}$$

Resistencia

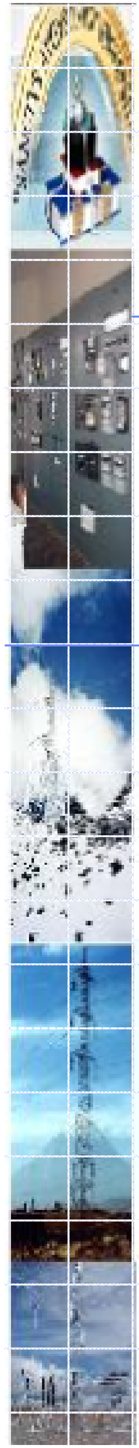
$$\overline{Z}_R = R$$
$$\overline{Y}_R = \frac{1}{R}$$

Inductor

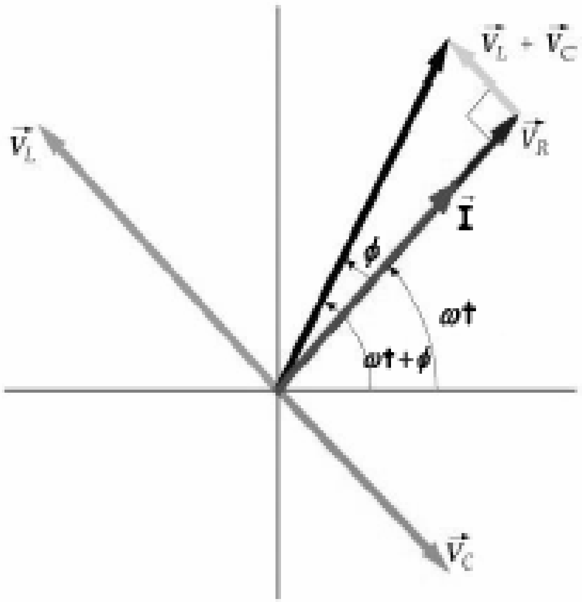
$$\overline{Z}_L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = \omega L i$$
$$\overline{Y}_L = \frac{1}{\omega L} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\omega L} i$$

Capacitor

$$\overline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\omega C} i$$
$$\overline{Y}_C = \omega C e^{i\frac{\pi}{2}} = \omega C i$$

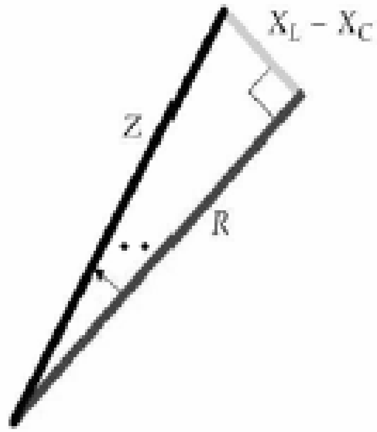


Circuito RLC serie



$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C$$

$X_L > X_C$	*Circuito inductivo*	• • > 0
$X_C > X_L$	*Circuito capacitivo*	• • < 0
$X_L = X_C$	*Circuito resonante*	• • = 0



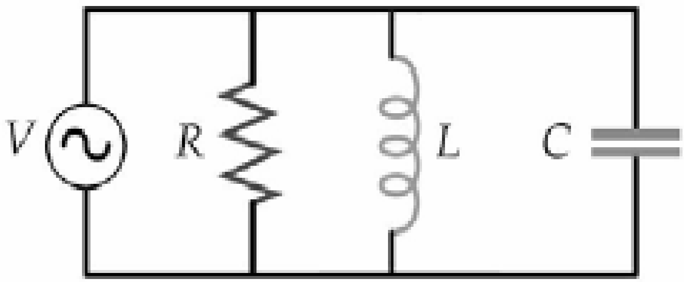
Reactancia del circuito

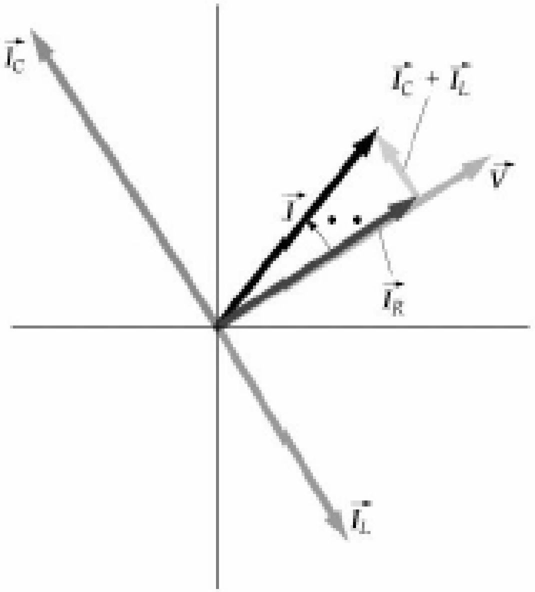
$$R = Z\cos\phi$$

$$X = Z\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Para cualquier circuito

Circuito RLC paralelo





$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_C + \bar{I}_L$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$

Potencia

$$P(t) = V(t)I(t)$$

$$P(t) = V_0 I_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\downarrow$$

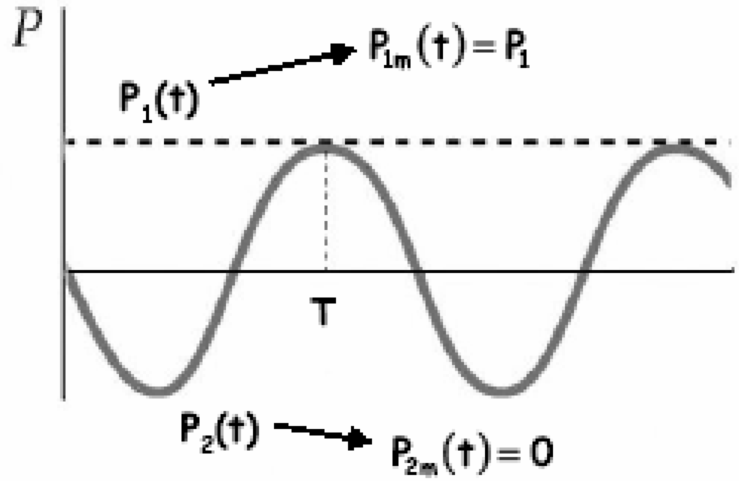
$$\boxed{\mathrm{sen}\,\alpha \;\mathrm{sen}\,\beta = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]}$$

$$\downarrow$$

$$P(t) = \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \left[\cos\phi - \cos(2\omega t + \phi)\right]$$

$$\downarrow$$

$$P(t) = P_1 + P_2(t) = \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi - \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \cos(2\omega t + \phi)$$



$$\boxed{P_m(t) = P_{1m}(t) + P_{2m}(t) = P_1 = \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi} \longrightarrow \boxed{\text{Potencia media}}$$

Potencia. Factor de potencia

$$P_m = \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \cos\phi$$

$\boxed{\text{Factor de potencia}} \longrightarrow \boxed{\text{Cos • •}}$

$$\left.\begin{array}{c} P_m = V_e I_e \cos\phi \\ \boxed{\text{Potencia aparente}} \\ P_m = V_e I_e \end{array}\right\}$$

Señales sinusoidales

Ley de Ohm para valores eficaces →

Potencia activa

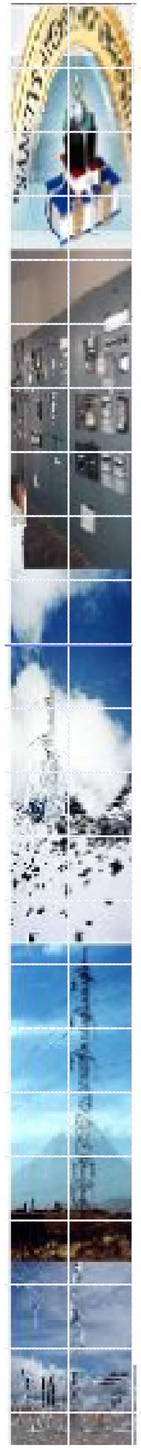
$$P_m = I_e^2 R = V_e^2 \frac{R}{Z^2}$$

Sólo las resistencias consumen potencia

En los elementos reactivos puros (condensador e inductor) no existe transferencia neta de energía desde el generador. Existe un almacenamiento periódico de energía que se devuelve al generador en el siguiente semiciclo.

$\boxed{P_L(t) \qquad P_C(t)}$

Potencia reactiva $\longrightarrow P_r = I_e^2 X \longrightarrow P_r = V_e I_e \operatorname{sen}\phi$



Resonancia

Un circuito de corriente alterna puede entrar en resonancia en amplitud (intensidad máxima) y en energía (potencia máxima). **Habrá dos frecuencias de resonancia.**

$\boxed{I_0 \text{ máxima}} \rightarrow I_0 = \dfrac{V_0}{Z} \rightarrow \boxed{Z \text{ mínima}}$ $\boxed{\omega = \omega_0 \quad X = 0 \quad B = 0} \rightarrow Z = R$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Potencia máxima}} \leftarrow P_m = I_0 V_0 \leftarrow \phi = 0 \quad \cos\phi = 1$

($\boxed{I_0 \text{ máxima}} \leftrightarrow \boxed{\text{Potencia máxima}}$)

ω_0: es la frecuencia angular natural del circuito

$\boxed{\text{Circuito RLC serie}} \rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow$ *Corriente limitada por la Capacitancia*

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow$ *Corriente limitada por la Inductacia*

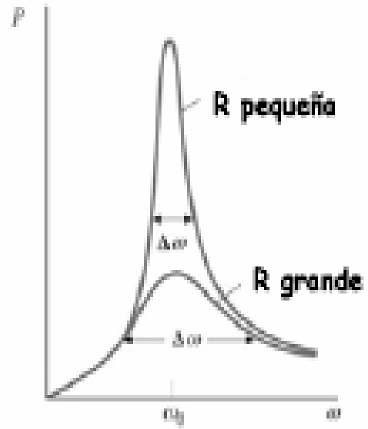
Ejemplo: Funcionamiento de un circuito de sintonización de aparatos de radio y televisión

Anchura de resonancia

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

ω_1 y ω_2 son las frecuencias para las que la potencia media es la mitad de la máxima

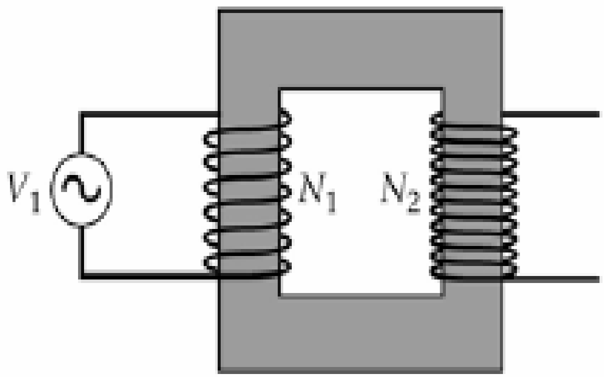
Circuito RLC serie



Factor de calidad

$$Q = 2\pi\frac{\text{Energía máxima alamcenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Transformadores



Inducción mutua

$$\left.\begin{aligned} V_1(t) &= N_1\varepsilon = -N_1\frac{d\phi_B}{dt} \\ V_2(t) &= N_2\varepsilon = -N_2\frac{d\phi_B}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Relación de transformación

Transformadores reales

$$\boxed{R = \frac{P_2}{P_1}}$$

Rendimiento

FASORES

Identidad de Euler $\exp(j\phi) = \cos(\phi) + j\,\mathrm{sen}(\phi)$

$\cos(\phi) = \mathrm{Re}[\exp(j\phi)]$ $\mathrm{sen}(\phi) = \mathrm{Im}[\exp(j\phi)]$

$$v(t) = Vm\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}[Vm\exp(j(\omega t+\phi))]$$

$$v(t) = \mathrm{Re}[Vm\exp(j\phi)\exp(j\omega t)]$$

$v(t) = \mathrm{Re}[\mathbf{V}\exp(j\omega t)]$ $\mathbf{V} = Vm\exp(j\phi) = Vm\,\mathrm{ang}(\phi)$

V = Fasor Voltaje

Representación de señales senoidales utilizando fasores

$$v(t) = V_m \cos(\omega t+\theta) \rightarrow V_m\angle\theta°$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t+\theta) \rightarrow V_m\angle(\theta-90)°$$

$dv/dt \Rightarrow j\omega V$

$\text{Integral } (v\,dt) \Rightarrow V/j\omega$

Ejemplo de operaciones con fasores

Problema 9.16

Utilizando fasores, calcular

a) 3 cos(20t + 10) – 5 cos(20t-30)
b) 40 sen(50t) + 30 cos(50t-45)
c) 20 sen 400t + 10 cos(400t+60) – 5 sen(400t-20)

(a) $3\angle 10° - 5\angle -30° = 2.954 + j0.5209 - 4.33 + j2.5$
$= -1.376 + j3.021$
$= 3.32\angle 114.49°$

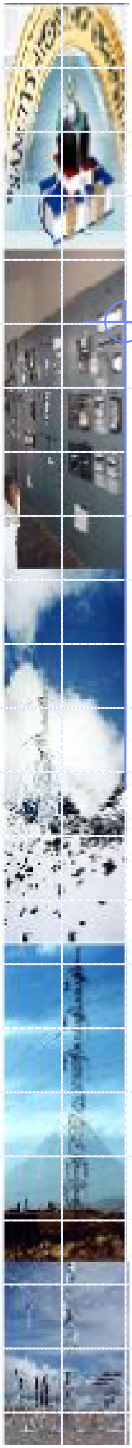
Therefore, $3\cos(20t + 10°) - 5\cos(20t - 30°) = \underline{3.32\cos(20t + 114.49°)}$

(b) $4\angle -90° + 3\angle -45° = -j40 + 21.21 - j21.21$
$= 21.21 - j61.21$
$= 64.78\angle -70.89°$

Therefore, $40\sin(50t) + 30\cos(50t - 45°) = \underline{64.78\cos(50t - 70.89°)}$

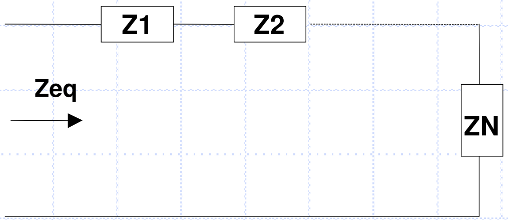
(c) Using $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°)$,
$20\angle -90° + 10\angle 60° - 5\angle -110° = -j20 + 5 + j8.66 + 1.7101 + j4.699$
$= 6.7101 - j6.641$
$= 9.44\angle -44.7°$

Therefore, $20\sin(400t) + 10\cos(400t + 60°) - 5\sin(400t - 20°)$
$= \underline{9.44\cos(400t - 44.7°)}$

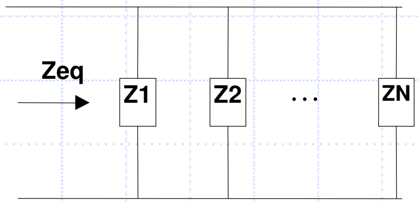


Relación voltaje-corriente en elementos pasivos

Element	Time domain	frequency domain	Impedance	Admitance
R	$v(t) = R\, i(t)$	$\mathbf{V} = R\,\mathbf{I}$	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
L	$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\,\mathbf{I}$	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\,\omega L}$
C	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$	$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega\ C$



$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_N$$



$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots \frac{1}{Z_N}}$$

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_N$$